ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΕΠΑΛ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	27/8/2019

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α₁. σελ. 22 (φροντ)
Α₂. σελ. 35 (φροντ)
Α₂. σελ. 91 (φροντ)
Α₂. α. Σ β. Λ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β₁. Από την γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι $f(A)=[0,+\infty)$.

Β₂. i) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$

Ii) $f(x)=-1$ αδύνατη, διότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει την οριζόντια ευθεία y=-1 σε κανένα σημείο

iii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq 3$

iv) $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$

Β₃. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι:

Γνησίως φθίνουσα για $x\in(-\infty,1]$ και για $x\in[2,3]$

Γνησίως αύξουσα για $x\in[1,2]$ και για $x\in[3,+\infty)$

Β₄. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει στο $x_1=1$ και στο $x_3=3$ ελάχιστο με τιμή $f(1)=f(3)=0$, ενώ στο $x_2=2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $f(2)=1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Για το τριώνυμο x^2-5x+6 είναι $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$, οπότε:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}$$

Ο πίνακας προσήμων γίνεται:

		2		3	
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Άρα $A_f=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

Γ₂. (i) Θα τέμνει τον άξονα x'x, όταν $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$, $x=3$

Δηλαδή στα σημεία Α(2,0) και Β(3,0).

Θα τέμνει τον άξονα y'y, στο $\Gamma(0,f(0))$, δηλαδή στο $\Gamma(0,\sqrt{6})$.

(ii) Λύνουμε την ανίσωση f(x)>0, οπότε έχουμε

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+6}>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$$

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x όταν $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

Γ₃. Οι C_f και C_g θα τέμνονται, όταν $f(x)=g(x)$,

Δηλαδή $\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2-5x+6=2 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$.

Η διακρίνουσα που προκύπτει είναι Δ=9 , οπότε θα προκύψουν οι λύσεις x=1 , x=4.

Οπότε οι γραφικές παραστάσεις θα τέμνονται στα σημεία $K(1,\sqrt{2})$ και $\Lambda(4,\sqrt{2})$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ₁. Έχουμε:

$$x^3-x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)-4(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+2)=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ ή $x=-2$ **.** Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

Για τον αριθμητή της συνάρτησης έχουμε $x^2-x-2=0 \overset{\Delta=9}{\Leftrightarrow} x=2$ ή $x=-1$. Άρα η παραγοντοποίηση του γίνεται: $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

Ισοδύναμα έχουμε: $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^3-x^2-4x+4}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x-2)(x+2)}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+2)}$.

Δ₂.

(α) Έχουμε $h(3)=f(3)=\dfrac{3+1}{(3-1)(3+2)}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ και $h(2)=3$. Άρα:

$$\alpha\cdot\frac{2}{5}-3\cdot 3=5 \Leftrightarrow \alpha\cdot\frac{2}{5}=14 \Leftrightarrow \alpha=35 .$$

(β) Θα πρέπει

$$h(\lambda)=\frac{2}{5} \overset{\lambda\neq 2}{\Leftrightarrow} f(\lambda)=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\lambda+1}{(\lambda-1)(\lambda+2)}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow 5(\lambda+1)=2(\lambda-1)(\lambda+2) \Leftrightarrow 5\lambda+5=2(\lambda^2+\lambda-2)$$

$$\Leftrightarrow 5\lambda+5=2(\lambda^2+\lambda-2) \Leftrightarrow 2\lambda^2-3\lambda+9=0 \overset{\Delta=81}{\Leftrightarrow} \lambda=3 \text{ ή } \lambda=-\frac{3}{2} .$$

Δ₃. (α) $g(x)=f(x)(x-1)(x+2)=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+2)}(x-1)(x+2)=x+1$.

Άρα για την μονοτονία της $g(x)=x+1$ έχουμε για κάθε $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $x_1<x_2$:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+1<x_2+1 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$. Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα.

(β) (i) Είναι $2019<2020 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(2019)<g(2020)$

(ii) Είναι $5>3 \Leftrightarrow x^2+5>x^2+3 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x^2+5)>g(x^2+3)$.